

Leçon 15 - Valeurs approchées d'un nombre

Encadrer un nombre, c'est le placer entre un nombre plus petit et un autre plus grand.

Exemple : voici un encadrement du nombre 13,58 : $10 < 13,58 < 18,5$

Il existe une infinité de façons d'encadrer un nombre ! Plusieurs sont particulières :

Encadrement à l'unité près

Encadrer à l'unité près, cela veut dire qu'on encadre avec deux nombres entiers consécutifs (qui se suivent), c'est-à-dire avec un écart d'une unité.

Exemple : un encadrement à l'unité près du nombre 13,28 :

$$13 < 13,28 < 14$$

valeur approchée de 13,28
à l'unité près par défaut

valeur approchée de 13,28
à l'unité près par excès

Encadrement au dixième près

Encadrer au dixième près, cela veut dire qu'on encadre avec deux nombres consécutifs de dixièmes, c'est-à-dire avec un écart d'un dixième.

Exemple : un encadrement au dixième près du nombre 40,863 :

$$40,8 < 40,863 < 40,9$$

valeur approchée de 40,863
au dixième près par défaut

valeur approchée de 40,863
au dixième près par excès

Exemple : un encadrement au dixième près du nombre 17,97 :

$$17,9 < 17,97 < 18 \quad (\text{car } 18,0 = 18)$$

valeur approchée de 17,97
au dixième près par défaut

valeur approchée de 17,97
au dixième près par excès

Encadrements au centième près, au millième près, etc.

On peut aussi encadrer au centième près, au millième près, etc.

Exemple : un encadrement au millième près (3 chiffres après la virgule) du nombre 3,8002 :

$$3,8 < 3,8002 < 3,801 \quad (\text{car } 3,800 = 3,8)$$

valeur approchée de 3,8002
au millième près par défaut

valeur approchée de 3,8002
au millième près par excès

Arrondi

Parmi les deux valeurs approchées d'un nombre, la plus proche du nombre s'appelle un arrondi.

Exemples :

- l'arrondi à l'unité près de 13,28 est 13
- l'arrondi au dixième près de 40,863 est 40,9
- l'arrondi au dixième près de 17,97 est 18 (car 18,0 = 18)
- l'arrondi au millième près de 3,8002 est 3,8 (car 3,800 = 3,8)

Exemples : On veut donner plusieurs encadrements du nombre 16,264.

- $16 < 16,264 < 17$ est un encadrement à l'unité du nombre 16,264.
16 est la valeur approchée par défaut à l'unité près.
17 est la valeur approchée par excès à l'unité près.
16,264 est « plus proche » de 16 que de 17, donc l'arrondi de 16,264 à l'unité près est 16.
 $16,264 \approx 16$ arrondi à l'unité près.
- $16,2 < 16,264 < 16,3$ est un encadrement au dixième du nombre 16,264.
16,2 est la valeur approchée par défaut au dixième près.
16,3 est la valeur approchée par excès au dixième près.
16,264 est « plus proche » de 16,3 (16,300) que de 16,2 (16,200) donc l'arrondi de 16,264 au dixième près est 16,3.
 $16,264 \approx 16,3$ arrondi au dixième près.
- $16,26 < 16,264 < 16,27$ est un encadrement au centième du nombre 16,264.
16,26 est la valeur approchée par défaut au centième près.
16,27 est la valeur approchée par excès au centième près.
16,264 est « plus proche » de 16,26 (16,260) que de 16,27 (16,270) donc l'arrondi de 16,264 au centième près est 16,26.
 $16,264 \approx 16,26$ arrondi au centième près.

- Exercice : Donner la valeur exacte puis l'arrondi au millièmè près du quotient $458 \div 7$.

Réponse : Posons la division de 458 par 7 avec la calculatrice:

la division de 458 par 7 donne comme résultat 65,428 571 428 571 ...

la suite de décimale « 428 571 » se répète indéfiniment.

La division ne se termine pas, on ne peut donner une valeur exacte du quotient avec une écriture décimale, on la donne sous forme fractionnaire.

Valeur exacte : $458 \div 7 = \frac{458}{7}$

- Méthode pour trouver l'arrondi : On veut arrondir au millièmè près, donc si on encadre le résultat au millièmè près : $65,428 < 458 \div 7 < 65,429$

Pour savoir laquelle des 2 valeurs approchées (par défaut ou par excès) est l'arrondi, il suffit de regarder le 4ème chiffre après la virgule (si ce chiffre est 0;1;2;3 ou 4 l'arrondi est la valeur approchée par défaut, si ce chiffre est 5;6;7;8 ou 9 l'arrondi est la valeur approchée par excès)

Dans l'exemple 65,428 571 428 571 ... le 4ème chiffre est un 5. donc l'arrondi au millièmè près est la valeur approchée par excès :

$458 \div 7 \approx 65,429$ arrondi au millièmè près.